

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Юлдашев Ренат Владимирович

**НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ  
ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ**

01.01.09 - Дискретная математика и математическая  
кибернетика

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2013

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители: член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

кандидат физико-математических наук,  
доцент КУЗНЕЦОВ Николай Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
ГЕЛИГ Аркадий Хаймович  
(Санкт-Петербургский государственный университет, заведующий кафедрой  
теоретической кибернетики)

доктор физико-математических наук, профессор  
БУРКИН Игорь Михайлович  
(Тульский государственный университет,  
заведующий кафедрой математического анализа)

Ведущая организация: Институт прикладной физики Российской  
Академии наук

Защита состоится 15 мая 2013 г. в 17 часов на заседании  
диссертационного совета Д 212.232.29 при Санкт-Петербургском  
государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В. О.,  
10 линия, дом 33-35, аудитория 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке  
им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по  
адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.232.29

доктор физико-математических наук, профессор

В.М. Нежинский

*Актуальность темы.* Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП, phase locked loops – PLL) широко распространены в радиотехнике и компьютерной архитектуре. Первая система ФАП была изобретена в 1930-х годах французским инженером Анри де Беллиссизом. Первое широкое применение системы ФАП получили в системе передачи телевизионного сигнала. В девяностых годах прошлого века эти системы стали применяться в многопроцессорных кластерах при параллельной обработке информации и как синтезаторы частот в компьютерной архитектуре. Такое применение систем ФАП для синхронизации тактовых генераторов и синтеза частот импульсных последовательностей потребовало нового, более общего подхода к разработке математического описания систем ФАП.

Несмотря на то, что ФАП является нелинейной системой управления, основным направлением изучения таких систем в современной инженерной литературе является анализ упрощенных линейных моделей. Строгий нелинейный анализ системы ФАП и различных ее модификаций является сложной задачей, поэтому на практике часто применяется компьютерное моделирование. Численное моделирование ФАП в пространстве сигналов является, как правило, очень трудоемким из-за нелинейности элементов ФАП и высоких частот рассматриваемых сигналов: обычно шаг моделирования, который должен быть достаточно малым, чтобы отчетливо наблюдать динамику нелинейных элементов ФАП, делает трудным наблюдение за динамикой всей системы. Проведение моделирования в частотно-фазовом пространстве позволяет преодолеть эти трудности, но требует построения соответствующих моделей ФАП и строгого обоснования перехода к ним.

*Цель работы.* Целью работы является вывод, математическое обоснование и исследование нелинейных моделей систем ФАП для различных классов сигналов, специальных систем ФАП с квадратором и двухфазных систем ФАП, а также численный анализ указанных систем.

*Методы исследования.* В работе применялись асимптотические методы анализа высокочастотных колебаний, метод усреднения Крылова-Боголюбова и методы численного решения дифференциальных уравнений.

*Результаты, выносимые на защиту.*

- Выведены нелинейные модели классических систем ФАП для кусочно-дифференцируемых сигналов;
- Выведены нелинейные модели систем ФАП с квадратором для кусочно-дифференцируемых сигналов;
- Разработан метод численного анализа систем ФАП в частотно-фазовом пространстве.

*Достоверность результатов.* Все результаты, выносимые на защиту, строго математически доказаны. Кроме того, достоверность результатов подтверждает численное моделирование.

*Научная новизна.* Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

*Практическая ценность.* Полученные в диссертации результаты позволяют вычислять характеристики фазовых детекторов и могут использоваться для анализа устойчивости модификаций систем ФАП, позволяют существенно сократить время численного моделирования и определять важные характеристики систем, такие как время удержания, время захвата, область удержания, область захвата, что позволяет существенно сократить время разработки систем ФАП и их анализ.

*Апробация работы.* Результаты данной работы докладывались на международных конференциях International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (St.Petersburg, Russia – 2012), IEEE 4th International Conference on Nonlinear Science and Complexity (Budapest, Hungary – 2012), 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (Rome, Italy – 2012), 5-ая российская МультиКонференция по Проблемам Управления (Санкт-Петербург, Россия – 2012), International conference Dynamical Systems and Applications (Kiev, Ukraine – 2012), XII международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, Россия – 2012), IEEE 10-th International Symposium on Signals, Circuits and Systems (Iasi, Romania – 2011), 8th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (Noordwijkerhout, The Netherlands – 2011), 4th IFAC Workshop on Periodic Control System (Antalya, Turkey – 2010), International Workshop “Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology” (Jyväskylä, Finland – 2010); на семинарах кафедры прикладной кибернетики СПбГУ и семинарах факультета информационных технологий (Jyväskylä, Finland).

На полученные в работе результаты были получены положительные заключения от профильных международных компаний, по результатам которых были оформлены патенты [9-10] и свидетельства об интеллектуальной собственности [11-12].

Работа поддержана государственными контрактами в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы

*Публикации.* Основные результаты диссертации представлены в 19 печатных работах, в том числе: 8 публикаций [1 – 8], опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК РФ; 2 патента и 2 свидетельства на программу ЭВМ.

В работах [2,6,8,18] соавторам принадлежат постановка задачи, оценка интегральных высокочастотных слагаемых и численное моделирование, диссертанту принадлежат формулировки и доказательства теорем.

В работах [1,4,5,14] соавторам принадлежат постановка задач, формулировка и доказательство теорем, диссертанту принадлежит оценка интегральных слагаемых для разрывных функций.

В работе [13] соавторам принадлежат постановки задач и анализ системы Костаса, диссертанту принадлежит анализ системы ФАП.

В работах [9,10] соавторам принадлежат постановка задачи и формула патента, диссертанту принадлежит описание патента.

В работе [11,12] соавторам принадлежат постановка задачи и программный код основного алгоритма, диссертанту принадлежит программный код интерфейсов и ввода-вывода.

В работе [7,19] соавторам принадлежат постановки задач, вывод и анализ динамической модели, диссертанту принадлежит вывод характеристик фазового детектора.

В работе [3] соавторам принадлежат постановки задач и построение программной модели, диссертанту принадлежит теоретическое обоснование.

*Объем и структура диссертации.* Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, списка литературы, включающего 101 наименование, изложена на 75 страницах машинописного текста и содержит 70 рисунков.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дается история систем фазовой автоподстройки (ФАП) и методов их исследования. Представлен обзор литературы, обосновываются актуальность и научная новизна диссертации, формулируются задачи, решаемые в диссертации.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим блок-схему классической схемы ФАП на уровне электронной реализации, Рис. 1.

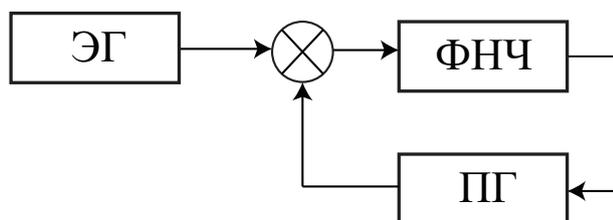


Рис. 1. Блок-схема классической системы ФАП на уровне электронной реализации

Схема состоит из следующих блоков: перемножитель, фильтр низких

частот (ФНЧ) и управляемый подстраиваемый генератор (ПГ). Сигналы с подстраиваемого и эталонного генераторов поступают на перемножитель ( $\otimes$ ) — нелинейный элемент, выход которого, проходя через фильтр низких частот, формирует управляющий сигнал подстраиваемого генератора. Работа ФАП заключается в автоматической подстройке фазы (частоты) сигнала подстраиваемого генератора к фазе (частоте) сигнала эталонного генератора (ЭГ).

Рассмотрим прохождение произведения высокочастотных колебаний через фильтр (Рис. 2). Здесь  $f^1(\theta^1(t))$  и  $f^2(\theta^2(t))$  — высокочастотные колебания

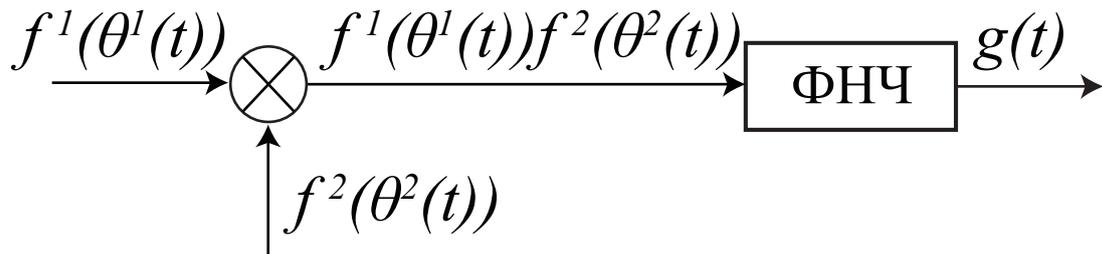


Рис. 2. Перемножитель и фильтр

колебания (сигналы эталонного и подстраиваемого генераторов соответственно),  $g(t)$  — выход фильтра. Функции  $f^{1,2}(\theta)$  являются  $2\pi$ -периодическими кусочно-дифференцируемыми.  $\theta^1(t), \theta^2(t)$  — монотонно возрастающие функции, производные (частоты) которых удовлетворяют неравенствам

$$\dot{\theta}^p(\tau) \geq \omega_{min} \gg 1, \quad p = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\omega_{min}$  — некоторое положительное число. Отметим, что в современных устройствах частоты генераторов могут достигать десятков гигагерц.

Рассмотрим блок-схему, изображенную на Рис. 3.

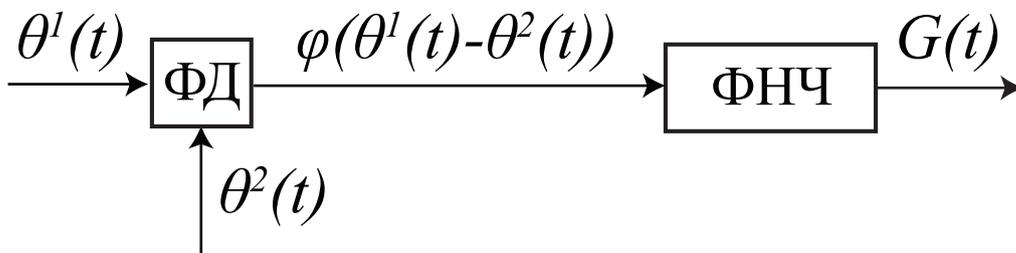


Рис. 3. Фазовый детектор и фильтр

Здесь ФД — нелинейный блок с выходом  $\varphi(\theta^1(t) - \theta^2(t))$ , а характеристики и начальные данные фильтров на Рис. 2 и Рис. 3 совпадают.

**Определение.** Схемы на Рис. 2 и Рис. 3 называются асимптотически эквивалентными, если на достаточно большом фиксированном интервале времени  $[0, T]$  выполнено

$$G(t) - g(t) = O(\delta), \quad \delta = \delta(\omega_{min}), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2)$$

где  $\delta(\omega_{min}) \rightarrow 0$ , при  $\omega_{min} \rightarrow \infty$ .

Рассмотрение асимптотически эквивалентных схем позволяет перейти от анализа моделей ФАП на уровне электронной реализации к анализу моделей ФАП в частотно-фазовом пространстве (Рис. 4)

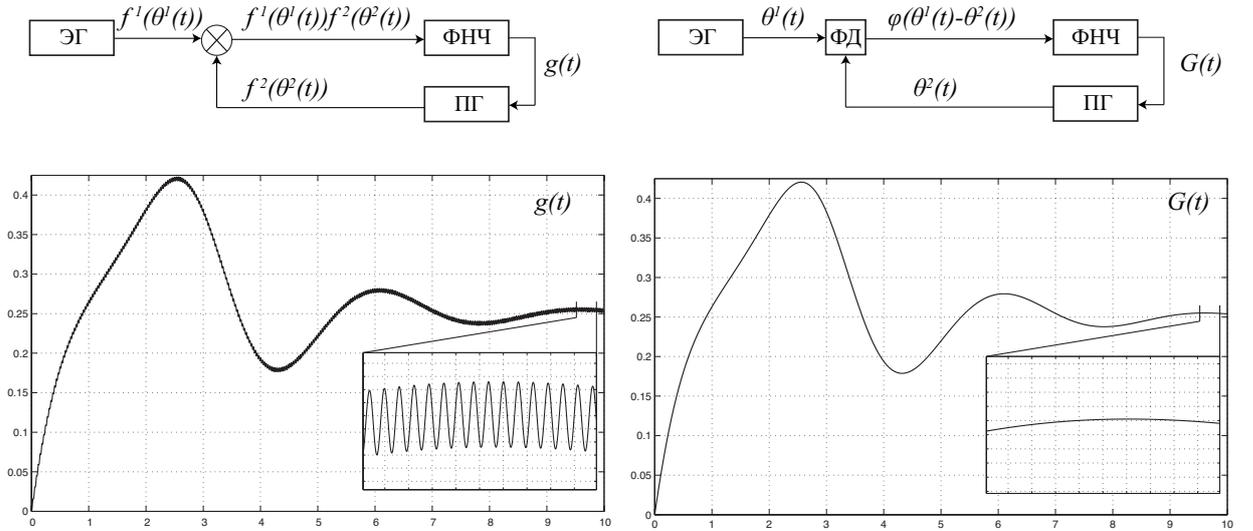


Рис. 4. Асимптотическая эквивалентность моделей ФАП на уровне электронной реализации и в частотно-фазовом пространстве.

Эквивалентность схем на Рис. 2 и Рис. 3 была показана А. Витерби и Ф. Гарднером (1966) без строгого математического обоснования для синусоидальных сигналов. В работах Г.А. Леонова и С.М. Селеджи (2005) приведены строгие условия высокочастотности и доказана асимптотическая эквивалентность схем на Рис. 2 и Рис. 3 для сигналов вида  $\sin(\theta)$  и  $\text{sign}(\sin(\theta))$ . При этом для синусоидальных сигналов характеристика фазового детектора является синусоидальной, в то время как для сигналов типа  $\text{sign}(\sin(\theta))$  характеристика является непрерывной кусочно-линейной функцией.

В данной работе была поставлена задача вычисления характеристики фазового детектора для сигналов общего вида, так чтобы схемы на Рис. 2 и Рис. 3 были асимптотически эквиваленты.

## 2. Основные предположения.

$$\begin{aligned}
 f^p(\theta) &= \frac{a_0^p}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^p \cos(i\theta) + b_i^p \sin(i\theta)), \quad p = 1, 2, \\
 a_0^p &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^p(x) dx, \\
 a_i^p &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^p(x) \cos(ix) dx, \quad b_i^p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^p(x) \sin(ix) dx, \quad i \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Соотношение между входом  $\xi(t)$  и выходом  $\psi(t)$  фильтра имеет вид

$$\psi(t) = \alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где  $\alpha_0(t)$  — экспоненциально затухающая функция, линейно зависящая от начального состояния фильтра в момент  $t = 0$ ,  $\gamma(t)$  — импульсная переходная функция линейного фильтра. Далее будем предполагать, что  $\gamma(t)$  — дифференцируемая функция с ограниченной производной. Тогда, согласно (4) функция  $g(t)$  имеет вид

$$g(t) = \alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t - \tau) f^1(\theta^1(\tau)) f^2(\theta^2(\tau)) d\tau. \tag{5}$$

Будем предполагать, что разность частот равномерно ограничена на рассматриваемом промежутке времени

$$|\dot{\theta}^1(\tau) - \dot{\theta}^2(\tau)| \leq \Delta\omega, \quad \forall \tau \in [0, T], \tag{6}$$

где  $\Delta\omega$  — некоторая константа.

Разобьем промежуток  $[0, T]$  на небольшие интервалы длиной  $\delta$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\omega_{min}}}. \tag{7}$$

Будем предполагать, что

$$|\dot{\theta}^p(\tau) - \dot{\theta}^p(t)| \leq \Delta\Omega, \quad p = 1, 2, \quad |t - \tau| \leq \delta, \quad \forall \tau, t \in [0, T], \tag{8}$$

где константа  $\Delta\Omega$  не зависит от  $t$  и  $\tau$ . Из соотношений (8) и (7) следует, что на малых интервалах времени функция  $\dot{\theta}^p(t)$  является “почти константой”.

Из ограниченности производной  $\gamma(t)$  следует существование константы  $C$ , такой что

$$|\gamma(\tau) - \gamma(t)| \leq C\delta, \quad |t - \tau| \leq \delta, \quad \forall \tau, t \in [0, T]. \quad (9)$$

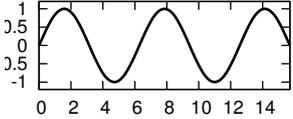
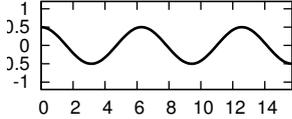
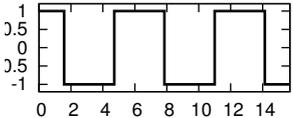
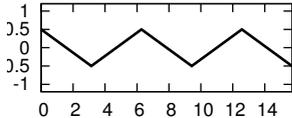
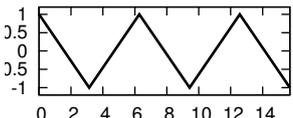
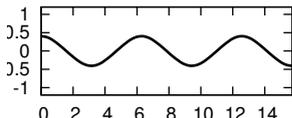
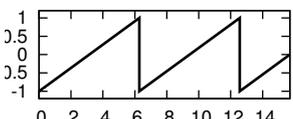
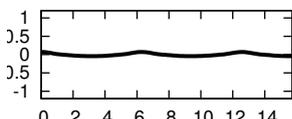
**3. Доказана теорема**, показывающая асимптотическую эквивалентность систем на Рис. 2 и Рис. 3.

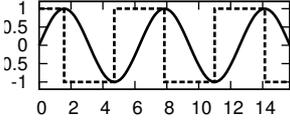
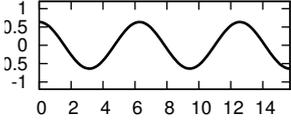
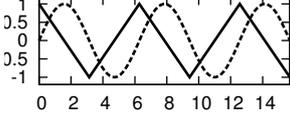
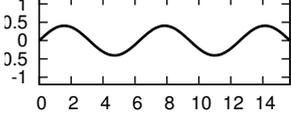
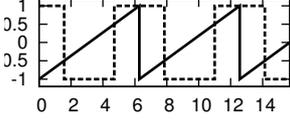
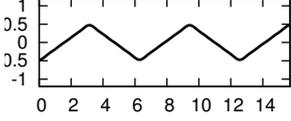
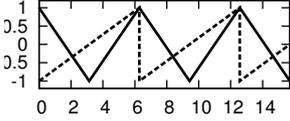
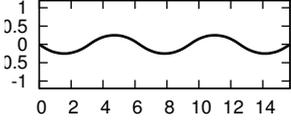
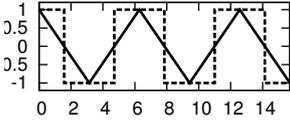
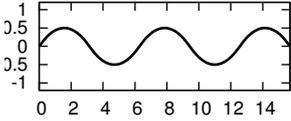
**Теорема 1** Если выполнены условия (1), (3), (6) – (9), то система на Рис. 2 асимптотически эквивалентна системе на Рис. 3, где

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0^1 a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( (a_l^1 a_l^2 + b_l^1 b_l^2) \cos(l\theta) + (a_l^1 b_l^2 - b_l^1 a_l^2) \sin(l\theta) \right). \quad (10)$$

#### 4. Характеристики ФД для различных классов сигналов.

Следующая таблица содержит характеристики фазового детектора для различных типовых классов сигналов.

| сигналы, $f^{1,2}(\theta)$   | характеристика, $\varphi(\theta)$  |
|--|--|
| $f^{1,2}(\theta) = \sin(\theta)$<br>  | $\varphi(\theta) = \frac{1}{2} \cos(\theta)$<br>   |
| $f^{1,2}(\theta) = \text{sign}(\sin(\theta))$<br>   | $\varphi(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta)$<br>  |
| $f^{1,2}(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta)$<br> | $\varphi(\theta) = \frac{32}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \cos((2n-1)\theta)$<br> |
| $f^{1,2}(\theta) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\theta)$<br>              | $\varphi(\theta) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\theta)$<br>            |

|   |   |
|---|---|
| $f^1(\theta) = \sin(\theta), f^2(\theta) = \text{sign} \sin(\theta)$   | $\varphi(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos(\theta)$    |
| $f^1(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta),$<br>$f^2(\theta) = \sin(\theta)$   | $\varphi(\theta) = \frac{4}{\pi^2} \sin(\theta)$    |
| $f^1(\theta) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\theta)$<br>$f^2(\theta) = \text{sign} \sin(\theta)$   | $\varphi(\theta) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$    |
| $f^1(\theta) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\theta)$<br>$f^2(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta)$  | $\varphi(\theta) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\theta)}{(2n-1)^3}$  |
| $f^1(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta)$<br>$f^2(\theta) = \text{sign} \sin(\theta)$                                      | $\varphi(\theta) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\theta)}{(2n-1)^3}$  |

## 5. Анализ систем системы ФАП с квадратором

Рассмотрим блок-схему специальной схемы ФАП с квадратором на уровне электронной реализации, Рис. 5.

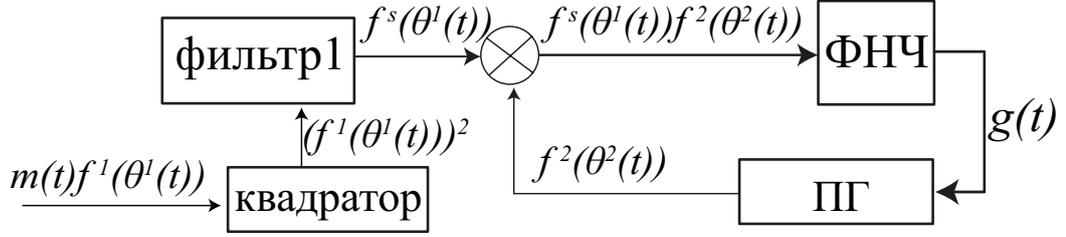


Рис. 5. Система ФАП с квадратором на уровне электронной реализации

Схема состоит из следующих блоков: перемножитель, фильтр низких частот (ФНЧ), квадратор и управляемый подстраиваемый генератор (ПГ). Здесь  $m(t) = \pm 1$  — передаваемые данные, а  $f^1(t) = f^1(\theta^1(t))$  — сигнал эталонного генератора (несущей). ПГ генерирует колебания  $f^2(t) = f^2(\theta^2(t))$ . Блок квадратора умножает входящий сигнал на себя

$$f^s(\theta^1(t)) = m(t)f^1(\theta^1(t))m(t)f^1(\theta^1(t)) = f^1(\theta^1(t))f^1(\theta^1(t)), \quad (11)$$

а следующий за ним фильтр убирает постоянную составляющую. Таким образом, сигнал данных  $m(t)$  не влияет на изменение частоты подстраиваемого генератора. Сигналы с подстраиваемого генератора и фильтра (фильтр1) поступают на перемножитель, выход которого, проходя через фильтр низких частот, формирует управляющий сигнал подстраиваемого генератора. Работа ФАП с квадратором заключается в автоматической подстройке фазы (частоты) сигнала управляемого генератора к фазе (частоте) сигнала поступающего на перемножитель после фильтра (фильтр1).

Рассмотрим прохождение произведения высокочастотных колебаний через линейный фильтр (см. блок-схему на Рис. 6)

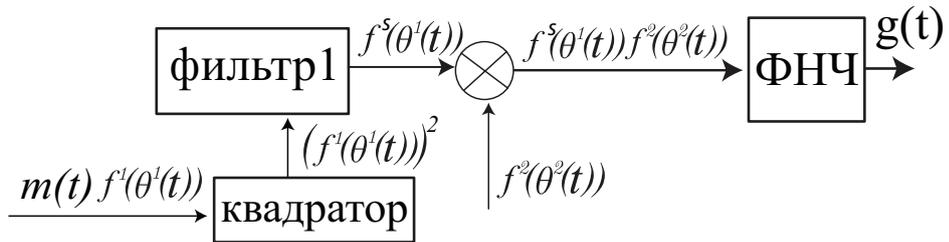


Рис. 6. Система ФАП с квадратором на уровне электронной реализации

Пусть  $g(t)$  выход ФНЧ. Тогда, согласно (4) имеем

$$g(t) = \alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t - \tau) f^s(\theta^1(\tau)) f^2(\theta^2(\tau)) d\tau. \quad (12)$$

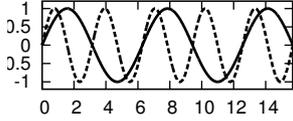
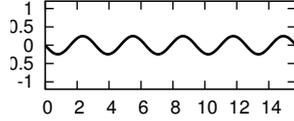
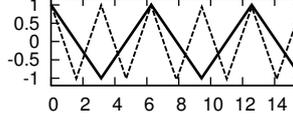
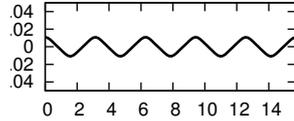
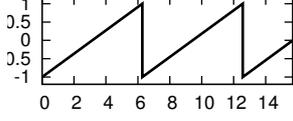
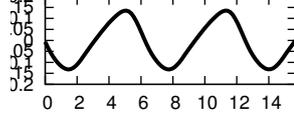
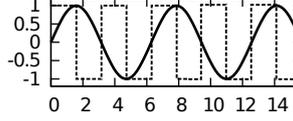
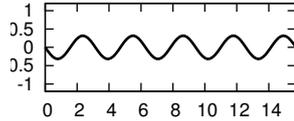
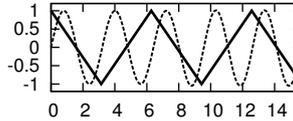
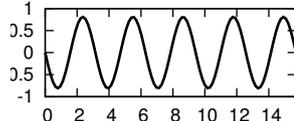
**Теорема 2** Если выполнены условия (1), (3), (6) – (9), то схема на Рис. 6 асимптотически эквивалентна схеме на Рис. 3, где

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left( (A_l^1 a_l^2 + B_l^1 b_l^2) \cos(l\theta) + (A_l^1 b_l^2 - B_l^1 a_l^2) \sin(l\theta) \right),$$

$$A_l^1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 (a_{m+l}^1 + a_{m-l}^1) + b_m^1 (b_{m+k}^1 + b_{m-k}^1)) \quad (13)$$

$$B_l^1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 (b_{m+l}^1 - b_{m-l}^1) - b_m^1 (a_{m+k}^1 + a_{m-k}^1)).$$

**6. Характеристики ФД систем ФАП с квадратором для различных типовых классов сигналов.**

| сигналы, $f^{1,2}(\theta)$  | характеристика, $\varphi(\theta)$  |
|---|--|
| $f^1(\theta) = \sin(\theta), f^2(\theta) = \sin(2\theta),$<br>   | $\varphi(\theta) = -\frac{1}{4} \sin(2\theta)$<br>   |
| $f^1(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta),$<br>$f^2(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((4n-2)\theta),$<br> | $\varphi(\theta) = \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)^4} \cos((4n-2)\theta)$<br> |
| $f^{1,2}(\theta) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\theta),$<br>  | $\varphi(\theta) = -\frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n\theta)$<br>           |
| $f^1(\theta) = \sin(\theta), f^2(\theta) = \text{sign} \sin(2\theta),$<br>   | $\varphi(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sin(2\theta)$<br>   |
| $f^1(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta)$<br>$f^2(\theta) = \sin(2\theta),$<br>  | $\varphi(\theta) = -\frac{8}{\pi^2} \sin(2\theta)$<br>   |

## 7. Вывод дифференциальных уравнений.

Приведен вывод дифференциальных уравнений для систем ФАП на уровне электронной реализации и в частотно-фазовом пространстве. С математической точки зрения линейный фильтр описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\xi(t), \quad \psi(t) = c^*x, \quad (14)$$

решение которой имеет вид (4), где

$$\gamma(t - \tau) = c^*e^{A(t-\tau)}b, \quad \alpha_0(t) = c^*e^{At}x_0. \quad (15)$$

Здесь  $\xi(t)$  и  $\psi(t)$  — соответственно вход и выход фильтра. Закон изменения частоты подстраиваемого генератора обычно принимается линейным

$$\dot{\theta}^2 = \omega_{free}^2 + Lc^*x(t), \quad (16)$$

где  $\omega_{free}^2$  — собственная частота подстраиваемого генератора. Тогда для системы на Рис. 1 получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf^1(\theta^1(t))f^2(\theta^2(t)), \\ \dot{\theta}^2 &= \omega_{free}^2 + Lc^*x. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда, полагая частоту эталонного генератора постоянной  $\dot{\theta}^1(t) \equiv \omega^1$  и вводя обозначение

$$\theta(t) = \theta^2(t) - \omega^1 t, \quad (18)$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf^1(\omega^1 t)f^2(\theta + \omega^1 t), \\ \dot{\theta} &= \omega_{free}^2 - \omega^1 + Lc^*x. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя теорему об асимптотической эквивалентности схем на Рис. 2 и Рис. 3 и метод усреднения Крылова-Боголюбова можно перейти к анализу более простой автономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega_{free}^2 - \omega^1 + Lc^*x, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\varphi(\theta)$  — соответствующая характеристика фазового детектора. Здесь для исследования полученной системы хорошо разработаны эффективные методы качественного анализа.

Рассуждая аналогичным образом, можно вывести уравнения для системы ФАП с квадратором.

Во **второй главе** приведены результаты численного моделирования систем ФАП в на уровне электронной реализации и в частотно-фазовом пространстве.

Далее будем рассматривать сигналы “треугольный” и “пила”. Для формы сигнала “пила” коэффициенты Фурье имеют вид

$$f^1(\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(i\theta), \quad a_i^1 = 0, \quad b_i^1 = \frac{2}{i\pi}. \quad (21)$$

“Треугольный” сигнал имеет следующее представление

$$f^2(\theta) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} \cos((2i-1)\theta), \quad a_{2i-1}^2 = \frac{8}{(2i-1)^2\pi^2}, \quad (22)$$

$$a_{2i}^2 = 0, \quad b_i^2 = 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Проведено сравнение результатов моделирования в частотно-фазовом пространстве и пространстве сигналов.

Реализация моделей в Матлаб (частота ПГ — 99Гц; частота ЭГ — 100Гц; передаточная функция фильтра —  $\frac{1}{1+s}$ ); усиление на входе ПГ — 10; промежуток времени — 20 с;  $M = 10$ .

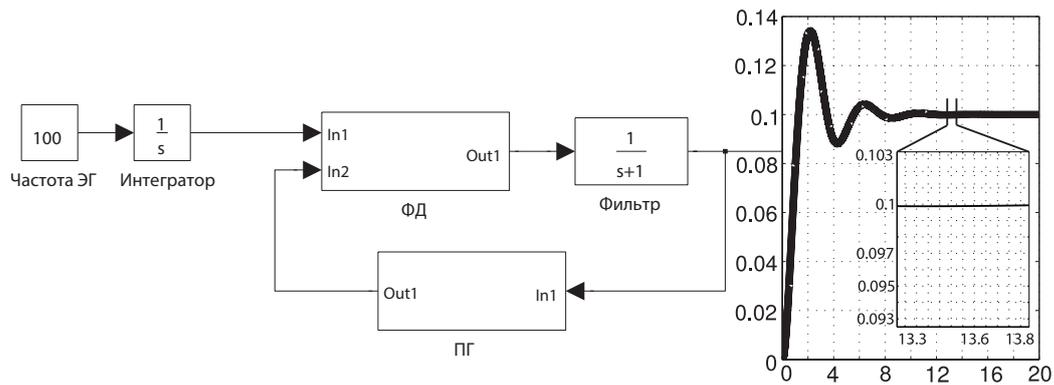


Рис. 7. Модель в частотно-фазовом пространстве. Время моделирования 0.3 с

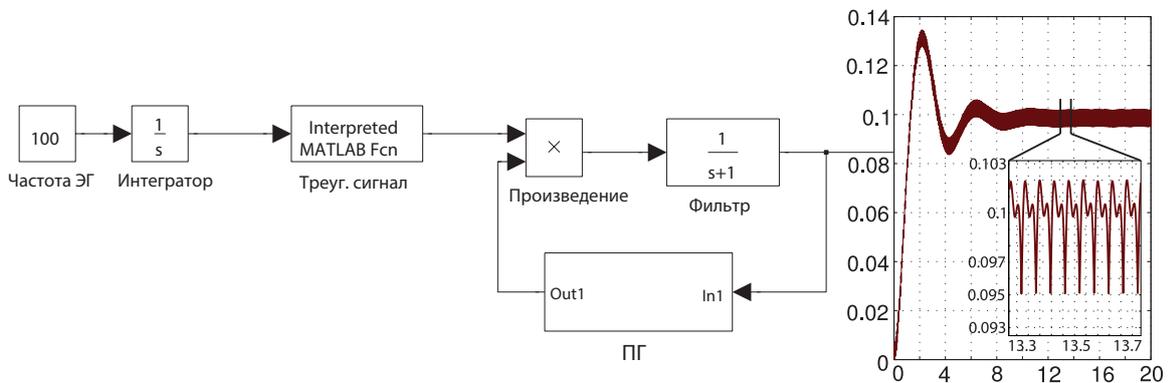


Рис. 8. Модель в пространстве сигналов. Время моделирования 30 с

Моделирование в частотно-фазовом пространстве оказалось здесь в сто раз быстрее. Данный подход представлен в патенте [9].

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК.

1. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Дифференциальные уравнения схемы Костаса // Доклады Академии Наук. 2012. Сер. Математика. т. 446, вып. 2, С. 149–154.
2. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Analytical method for computation of phase-detector characteristic // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2012. Vol. 59, issue 10, P. 633–637
3. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P., Seledzhi S.M., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Simulation of phase-locked loops in phase-frequency domain / International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. 2012. P. 351–356
4. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P., Seledzhi S.M., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear mathematical models of Costas Loop for general waveform of input signal / IEEE 4th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, NSC 2012 - Proceedings. 2012. P. 75–80.
5. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear analysis of Costas loop circuit / ICINCO 2012 - Proceedings of the 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2012. Vol. 1, P. 557–560.
6. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Вычисление характеристик фазового для сигналов общего вида // Доклады Академии Наук. 2011. Сер. Математика. т. 84, вып. 1, С. 586–590.
7. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Analytical methods for computation of phase-detector characteristics and PLL design / Proceedings of IEEE 10-th International Symposium on Signals, Circuits and Systems. 2011. P. 7-10.
8. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P., Seledzhi S.M., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. High-frequency analysis of phase-locked loop and phase detector characteristic computation / ICINCO 2011 - Proceedings of the 8th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2011. Vol. 1, P. 272–278.

## Патенты и свидетельства

9. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Селеджи С.М., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Патент РФ на полезную модель. Модулятор параметров фазового детектора. RU 2449463 С1. 2011.
10. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Селеджи С.М., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Патент РФ на изобретение. Способ для определения рабочих параметров фазовой автоподстройки частоты генератора и устройство для

его реализации. RU 11255 U1. 2011.

11. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Селеджи С.М., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Свидетельство на программу для ЭВМ. Программа для определения и моделирования основных характеристик систем фазовой автоподстройки частоты (MR). №2011613388. 2011.

12. Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Селеджи С.М., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Свидетельство на программу для ЭВМ. Программа для определения и моделирования основных характеристик систем Costas Loop (CLMod). №2011616770. 2011.

#### Другие публикации

13. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Фазовая синхронизация в аналоговой и цифровой схемотехнике / Материалы пленарного заседания. СПб:5-ая российская МультиКонференция по Проблемам Управления (Санкт-Петербург, Россия). 2012. С. 24–31.

14. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear analysis of analog phase-locked loop / Proceedings of International conference Dynamical Systems and Applications. 2012. P. 21–22.

15. Юлдашев Р.В. Нелинейный анализ систем фазовой автоподстройки с фазовым детектором реализованным в виде перемножителя / Тезисы докладов XII международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». 2012. С. 350–352.

16. Юлдашев Р.В. Эффективное моделирование систем фазовой автоподстройки / Материалы 3-й межвузовской научной конференции по проблемам информатики. 2012. С. 459–460.

17. Юлдашев Р.В. Вычисление характеристики фазового детектора-перемножителя для синусоидального и импульсного сигналов / Материалы 2-й межвузовской научной конференции по проблемам информатики. 2011. С. 391-392.

18. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P., Seledzhi S.M., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear Analysis of Phase-locked Loop / Abstract of Mathematical and Numerical Modeling in Science and Technology. 2010. P. 4.

19. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P., Seledzhi S.M., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Nonlinear Analysis of Phase-locked loop / 4th IFAC Workshop on Periodic Control System. 2010. Vol. 4, PART 1, P. 34–38.